TRANSFORMASI-Z RASIONAL

1. Pole dan Zero

Zero dari suatu transformasi-z adalah nilai-nilai z dengan X(z) = 0.

Pole dari suatu transfromasi-z adalah nilai-nilai z dengan X(z) = ∞. Jika X(z) adalah fungsi rasional, maka

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}} \quad (1)$$

Jika $a_0 \neq 0$ dan $b_0 \neq 0$, kita dapat menghindari pangkat z negatif dengan memfaktorkan bentuk b_0z^{-M} dan a_0z^{-N} sebagai berikut:

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0z^{-M}}{a_0z^{-N}}\frac{z^M+(b_1/b_0)z^{M-1}+\cdots+b_M/b_0}{z^N+(a_1/a_0)z^{N-1}+\cdots+a_N/a_0} \quad (2)$$

Karena N(z) dan D(z) adalah polinomial dalam z, mereka dapat dinyatakan dalam bentuk faktor sebagai

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0}{a_0}z^{-M+N}\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

$$X(z)=Gz^{N-M}\frac{\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)} \quad (3)$$

Dengan $G \equiv b_0/a_0$. jadi X(z) mempunyai M zero berhingga di $z = z_1, z_2, \ldots, z_M$ (akar-akar dari polinomial bilangan). N pole berhingga di $z = p_1, p_2, \ldots, p_N$ (akar-akar polinomial penyebut). Dan |N – M| zero jika N > M atau pole jika N < M di titik awal z = 0. Pole dan zero juga dapat terjadi di z = ∞. Suatu zero ada di z = ∞ jika X(∞) = 0 dan pole ada di z = ∞ jika X(∞) = ∞. Jika kita menghitung pole dan zero di nol dan tak berhingga, kita menemukan bahwa X(z) secara eksak mempunyai jumlah pole dan zero yang sama.

Contoh 1:

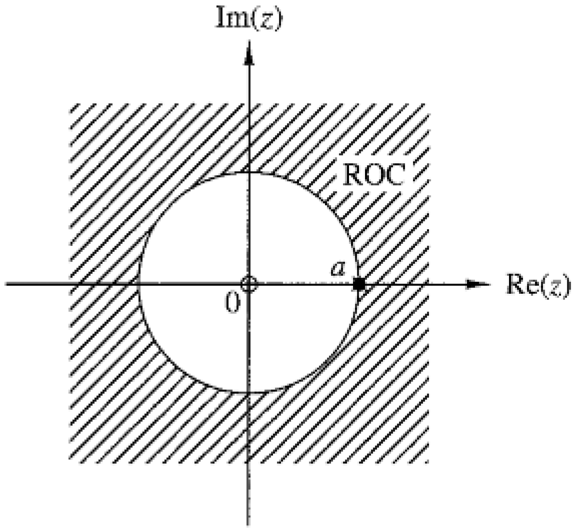
Tentukan pemetaan pole-zero untuk sinyal

$$X(n) = n^n u(n) \qquad a > 0$$

Jawab:

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}, \qquad \text{ROC: } |z|>a$$

Zero $z_1 = 0$ dan pole $p_1 = a$.



Contoh 2:
Tentukan pemetaan pole-zero untuk sinyal

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Dengan a > 0.
Jawab:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} (az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^M}{1-az^{-1}} = \frac{z^M - a^M}{z^{M-1}(z-a)}$$

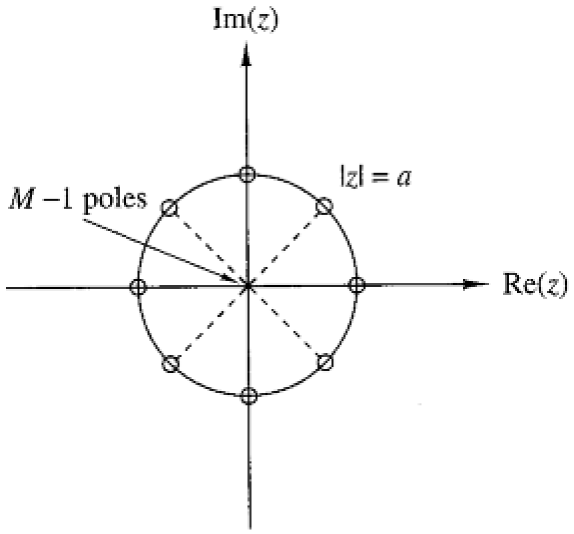
Karena a > 0 persamaan $z^M = a^M$ mempunyai akar-akar pada

$$z_k = ae^{j2\pi k/M} \qquad k = 0, 1, \ldots, M-1$$

Zero $z_0 = a$ membatalkan pole di z = a jadi

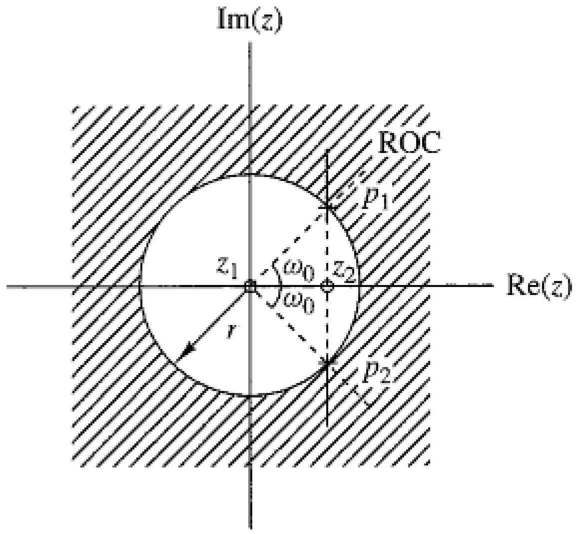
$$X(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{M-1})}{z^{M-1}}$$

Yang mempunyai M-1 zero dan M-1 pole yang ditempatkan seperti pada gambar berikut



ROC adalah seluruh bidang-z kecuali z = 0 karena M-1 pole berlokasi di titik awal.

Contoh 3:
Tentukan transformasi-z sinyal yang sesuai dengan pemetaan pole-zero pada gambar berikut



Jawab:
Ada dua zero (M =2) di z_1=0, z_2 = r cos ω_0 dan dua pole (N = 2) di $p_1 = re^{j\omega 0}$, $p_2 = re^{-j\omega 0}$, dengan substitusi hubungan-hubungan ini ke dalam persamaan (3) diperoleh

$$X(z) = G\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-p_1)(z-p_2)} = G\frac{z(z - r\cos\omega 0)}{(z-re^{j\omega_0})(z-re^{-j\omega_0})}), \qquad \text{ROC: } |z| > r$$

Dengan manipulasi aljabar didapatkan

$$X(z) = G\frac{1 - rz^{-1}\cos\omega 0}{1 - 2rz^{-1}\cos\omega_0 + r^2z^{-2}}, \qquad \text{ROC: } |z| > r$$

Sehingga dapat dilihat dalam tabel bahwa

$$x(n) = G(r^n \cos \omega_0 n)u(n)$$

2. Lokasi pole dan sikap domain-waktu sinyak kausal

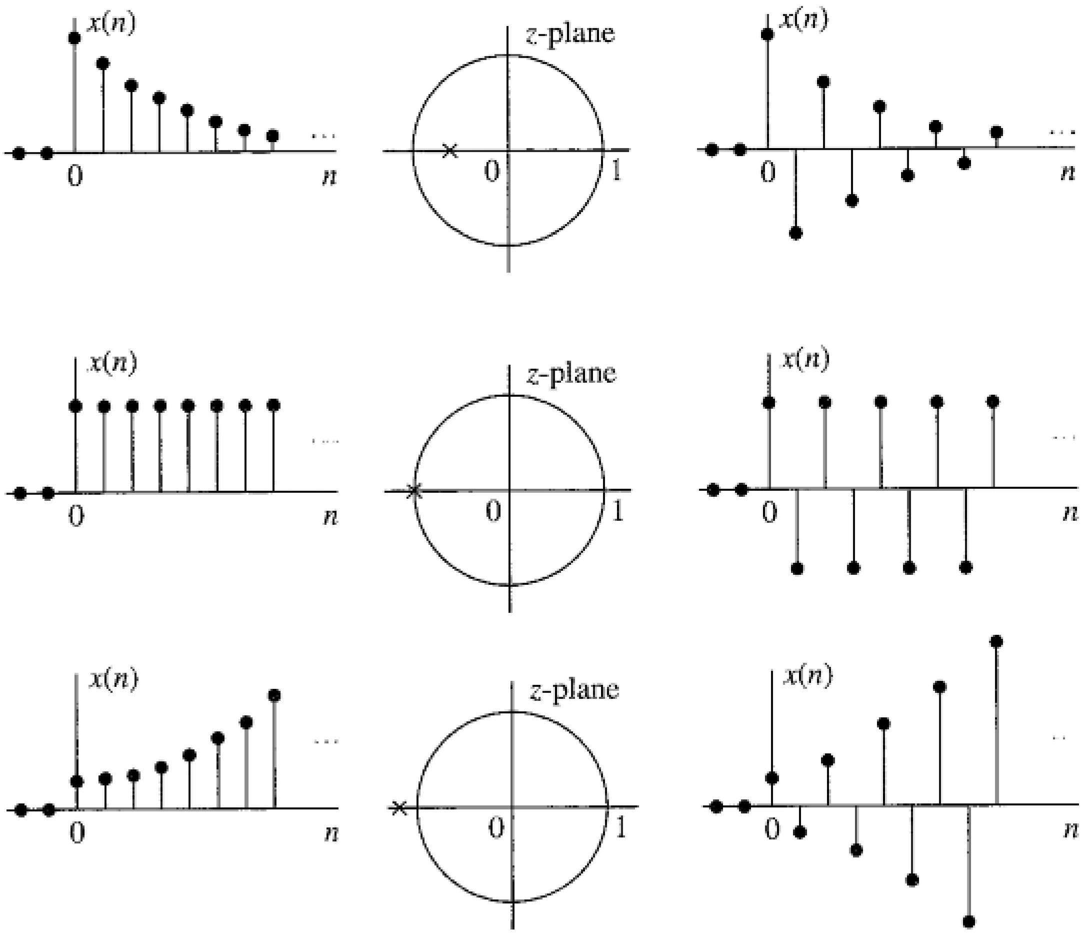
   Sikap karakteristik sinyal kausal tergantung pada akar pole dari transformasi terdapat pada daerah |z| < 1 atau |z| >1 atau |z| = 1, karena lingkaran pada daerah z = 1 mempunyai radius sama dengan 1, ia dinamakan <u>lingkaran unit</u>.

   Jika sinyal real mempunyai transformasi-z dengan satu pole, pole ini akan menjadi real. Hanya sinyal seperti itu yang eksponesial real

   $$x(n) = a^n u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > |a|$$

   Zero di $z_1 = 0$ dan $p_1 = a$ pada sumbu real.

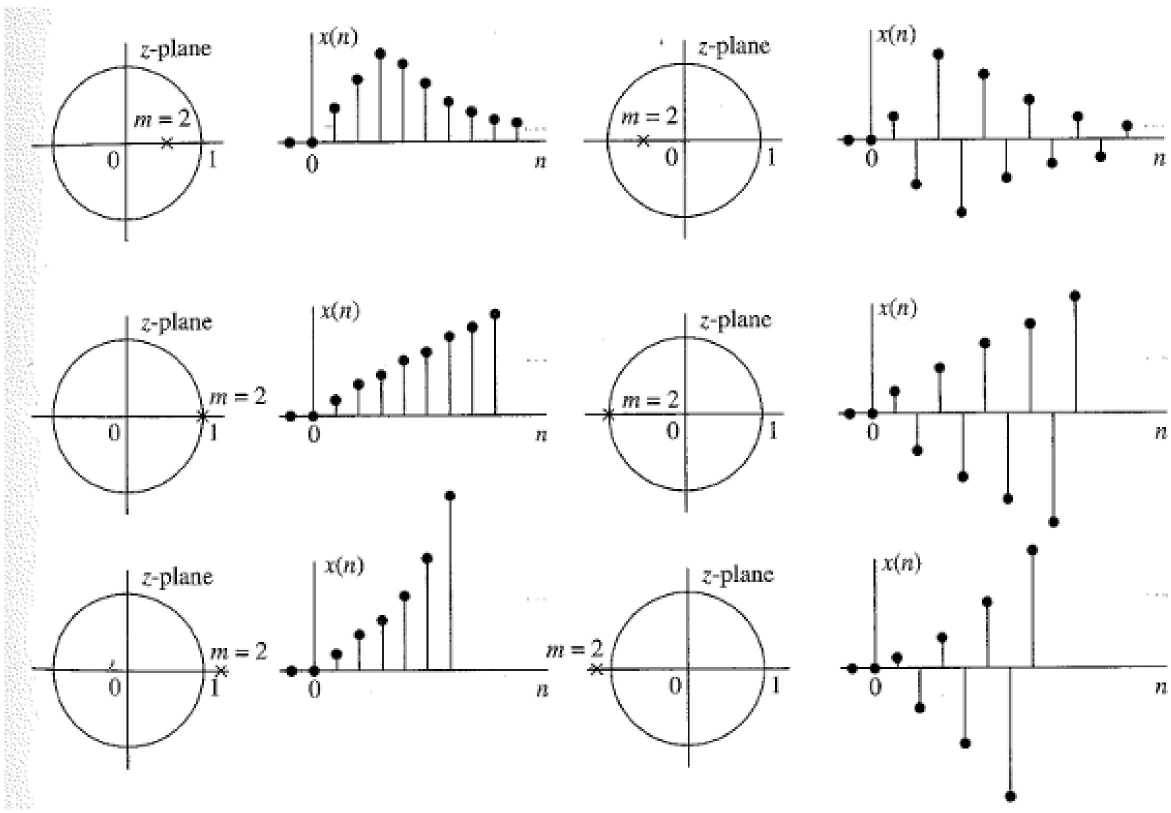
   Berikut ini, gambar kebiasaan isnyal yang tanggap terhadap lokasi pole relatif terhadap lingkaran unit.



   Suatu sinyal kausal dengan pole real ganda mempunyai bentuk

   $$x(n) = na^n u(n)$$

   Dan kebiasaanya diilustrasikan pada gmbar di bawah ini



3. Inversi transformasi-z dengan ekspansi parsial

Perhatikan X(z) yang diberikan oleh persamaan:

$$X(z)=\frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}; \quad \text{dengan } m \le n$$

Untuk mengekspansi X(z) menjadi pecahan parsial, pertama kita memfaktorkan penyebut dan menemukan pole-pole dari X(z):

$$X(z)=\frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

Kemudian kita mengekspansi X(z)/z menjadi pecahan parsial, sehingga setiap suku mudah disesuaikan dengan tabel transformasi-z.

<u>Contoh 4 :</u>

Tentukan invers transformasi-z dari:

$$X(z)=\frac{1}{1-1{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2}}; \quad \text{jika ROC} : |z| > 1$$

Jawab:

Ekspansi pecahan parsial dari X(z) menghasilkan:

$$X(z)=\frac{2}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0{,}5z^{-1}}; \quad \text{didapat } p_1 = 1,\ p_2 = 0{,}5$$

Bila ROC adalah |z| > 1, berarti sinyal x(n) adalah sinyal kausal, sehingga:

$x(n) = 2\,u(n) – (0,5)^n\,u(n)$

$\quad = (2 – (0,5)^n)\,u(n)$

b. Ketika X(z) terdiri *pole-pole* pasangan kompleks

Jika p_1 dan p_2 adalah *pole-pole* pasangan bilangan kompleks, dan *pole* lainnya adalah *pole* riil dan tak berulang, maka ekspansi berikut dapat dipakai:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{(z+p_1)(z+p_2)} + \ldots + \frac{a_n}{z+p_n}$$

Koefisien pole-pole riil dicari terlebih dahulu, dengan cara yang sama dengan pembahasan sebelumnya, kemudian nilai-nilai dari α_1 dan α_2 ditemukan dengan rumus:

$$(\alpha_1 z + \alpha_2)(z+p_3)\ldots(z+p_n) + \ldots + a_n(z+p_1)(z+p_2) = B(z)$$

dimana B(z) adalah bagian pembilang dari X(z)/z. Kemudian koefisien z pangkat tertentu pada kedua ruas disamakan, sehingga akan didapat nilai α_1 dan α_2.

Contoh 5:

Tentukan invers transformasi z dari:

$$X(z) = \frac{z^2+z}{z^3-2z^2+2z-1} = \frac{z^2+z}{(z-1)(z^2-z+1)}$$

Jawab:

Ekspansi pecahan parsial dari X(z)/z menghasilkan:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-1)(z^2-z+1)} = \frac{a}{z-1} + \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{(z^2-z+1)}$$

nilai a dicari dengan:

$$a = \left.\frac{X(z)}{z}(z-1)\right|_{z=1} = \left.\frac{z+1}{(z^2-z+1)}\right|_{z=1} = 2$$

sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{z+1}{(z-1)(z^2-z+1)} = \frac{2}{z-1} + \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{(z^2-z+1)}$$

kemudian dicari nilai α_1 dan α_2 dengan menyamakan penyebut dari kedua ruas :

$2(z^2 – z + 1) + (z – 1)(\alpha_1 z + \alpha_2) = z + 1$

$2z^2 – 2z + 2 + (\alpha_1 z^2 – \alpha_1 z + \alpha_2 z – \alpha_2) = z + 1$

$(2 + \alpha_1)z^2 + (-2 – \alpha_1 + \alpha_2)z + (2 – \alpha_2)z^0 = (0)z^2 + (1)z + (1)z^0$

sehingga :

z^2 : $\quad 2 + \alpha_1 = 0$

z^1 : $\quad -2 – \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

z^0 : $2 - \alpha_2 = 1$

akhirnya didapatkan $\alpha_1 = -2$ dan $\alpha_2 = 1$, sehingga:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z-1} + \frac{-2z+1}{\left(z^2 - z + 1\right)} \text{ atau } X(z) = 2\frac{z}{z-1} - 2\frac{z^2 - 0{,}5z}{\left(z^2 - z + 1\right)}$$

mengingat pasangan transformasi-z (lihat Tabel) :

$$Z[(a^n \cos \Omega_0 n)\, u(n)] = \frac{z^2 - az\cos\Omega_0}{z^2 - 2az\cos\Omega_0 + a^2}$$

maka a = 1, $\cos \Omega_0 = 0{,}5$, dan diperoleh $\Omega_0 = \pi/3$, sehingga didapat:

$$x(n) = 2.u(n) - 2\, u(n) \cos(\pi/3)n$$

Cara lain untuk mencari invers transformasi-z yang mempunyai *pole* komplekss adalah menggunakan pola pencarian invers untuk *pole* riil dan tak berulang. Hanya saja cara ini harus menggunakan bilangan kompleks. Berikut ini akan diperlihatkan metode tersebut untuk persoalan yang sama seperti pada Contoh 5:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-1)\left(z^2 - z + 1\right)} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z - 0{,}5 + j0{,}87} + \frac{a_3}{z - 0{,}5 - j0{,}87}$$

$$a_1 = \frac{X(z)}{z}(z-1)\bigg|_{z=1} = \frac{z+1}{\left(z^2 - z + 1\right)}\bigg|_{z=1} = 2$$

$$a_2 = \frac{z+1}{(z-1)(z-0{,}5-j0{,}87)}\bigg|_{z=0{,}5-j0{,}87} = \frac{1{,}5 - j0{,}87}{(-0{,}5 - j0{,}87)(-j1{,}732)} = -1$$

$$a_3 = \frac{z+1}{(z-1)(z-0{,}5+j0{,}87)}\bigg|_{z=0{,}5+j0{,}87} = \frac{1{,}5 + j0{,}87}{(-0{,}5 + j0{,}87)(j1{,}732)} = -1$$

Nilai-nilai koefisien tersebut dimasukkan sehingga didapat:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z-1} + \frac{-1}{z - 0{,}5 + j0{,}87} + \frac{-1}{z - 0{,}5 - j0{,}87}$$

$$X(z) = 2\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - 0{,}5 + j0{,}87} - \frac{z}{z - 0{,}5 - j0{,}87}$$

$$X(z) = 2\frac{z}{z-1} - \left(\frac{z}{z - 0{,}5 + j0{,}87} + \frac{z}{z - 0{,}5 - j0{,}87}\right)$$

$$X(z) = 2\frac{z}{z-1} - \left(\frac{z(z - 0{,}5 - j0{,}87) + z(z - 0{,}5 + j0{,}87)}{z^2 - z + 1}\right)$$

$$X(z) = 2\frac{z}{z-1} - \left(\frac{2z^2 - z}{z^2 - z + 1}\right) = 2\frac{z}{z-1} - 2\left(\frac{z^2 - 0{,}5z}{z^2 - z + 1}\right)$$

mengingat pasangan transformasi-z (lihat Tabel 5.2) :

$$Z[(a^n \cos \Omega_0 n)\ u(n)] = \frac{z^2 - az\cos\Omega_0}{z^2 - 2az\cos\Omega_0 + a^2}$$

maka a = 1, cos Ω_0 = 0,5, dan diperoleh $\Omega_0 = \pi/3$, sehingga didapat:

$$x(n) = 2.u(n) - 2\ u(n) \cos(\pi/3)n$$

c. Ketika X(z) terdiri dari *pole-pole* riil dan berulang

Jika X(z)/z memiliki *pole-pole* berulang pada p_1 dengan pangkat r, maka penyebut dapat ditulis sebagai:

$$(z + p_1)^r (z + p_{r+1})(z + p_{r+2})\ldots(z + p_n)$$

Ekspansi pecahan parsial dari X(z)/z ditulis sebagai:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_r}{(z+p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(z+p_1)^{r-1}} + \ldots + \frac{b_1}{(z+p_1)}$$
$$+ \frac{a_{r+1}}{z+p_{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{z+p_{r+2}} + \ldots + \frac{a_n}{z+p_n}$$

Nilai-nilai konstanta a_{r+1}, a_{r+2}, …, a_n dicari dengan pola yang sama dengan sebelumnya, sedangkan b_r, b_{r-1}, …, b_1 dicari dengan rumus:

$$b_r = \left[\frac{X(z)}{z}(z+p_1)^r\right]_{z=-p_1}$$

$$b_{r-1} = \left\{\frac{d}{dz}\left[\frac{X(z)}{z}(z+p_1)^r\right]\right\}_{z=-p_1}$$

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{dz^j}\left[\frac{X(z)}{z}(z+p_1)^r\right]\right\}_{z=-p_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!}\left\{\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left[\frac{X(z)}{z}(z+p_1)^r\right]\right\}_{z=-p_1}$$

<u>Contoh 6:</u>

Tentukan invers transformasi-z dari:

$$X(z) = \frac{6z^3 + 2z^2 - z}{z^3 - z^2 - z + 1}$$

Jawab:

Pemfaktoran dari X(z)/z menghasilkan:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{6z^2 + 2z - 1}{z^3 - z^2 - z + 1} = \frac{6z^2 + 2z - 1}{(z-1)^2(z+1)}$$

dan didapat *pole-pole*: p_1 = 1, p_2 = 1 dan p_3 = –1, sehingga ekspansi pecahan parsial yang dihasilkan adalah:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1} + \frac{a}{z+1}$$

kemudian dicari nilai masing-masing konstanta:

$$b_2 = (z-1)^2 \left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=1} = \frac{6+2-1}{2} = 3{,}5$$

$$b_1 = \frac{d}{dz}\left\{(z-1)^2 \frac{X(z)}{z}\right\}\Bigg|_{z=1} = \frac{2(14)-7}{4} = 5{,}25$$

$$a = (z+1)\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=-1} = \frac{6-2-1}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{3{,}5}{(z-1)^2} + \frac{5{,}25}{z-1} + \frac{0{,}75}{z+1}$$

$$X(z) = 3{,}5\frac{z}{(z-1)^2} + 5{,}25\frac{z}{z-1} + 0{,}75\frac{z}{z+1}$$

dan dengan menggunakan tabel pasangan transformasi-z diperoleh invers transformasi-z:

$x(n) = 3{,}5n\,u(n) + 5{,}25\,u(n) + 0{,}75(-1)^n\,u(n)$

4. Penyelesaian Persamaan Beda dengan Transformasi-z

Persamaan beda dapat diselesaikan secara mudah dengan menggunakan suatu komputer digital. Tetapi, ekspresi bentuk tertutup untuk x(n) tidak dapat diperoleh dari penyelesaian komputer, kecuali untuk kasus khusus. Transformasi-z dapat mengatasi masalah ini.

Perhatikan sistem waktu diskrit yang dinyatakan dalam persamaan beda berikut:

$$y(n) + a_1\,y(n-1) + \ldots + a_n\,y(n-k) =$$
$$b_0\,x(n) + b_1\,x(n-1) + \ldots + b_n\,x(n-k)$$

dimana y(n) dan x(n) berturut-turut adalah output dan input sistem.

Bila didefinisikan Z[x(n)] = X(z), maka x(n+1), x(n+2), …, dan x(n–1), x(n–2), … dapat dinyatakan dalam bentuk: X(z) dan kondisi inisialnya, seperti terlihat pada tabel berikut:

Tabel

Pasangan transformasi-z dan transformasi-z satu sisi

Fungsi diskrit	**Transformasi-z satu sisi**	**Transformasi-z**
x(n + 2)	$z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$	$z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$
x(n + 1)	$zX(z) - zx(0)$	$zX(z) - zx(0)$
x(n)	X(z)	X(z)
x(n – 1)	$z^{-1} X(z)$	$z^{-1} X(z) + x(-1)$
x(n – 2)	$z^{-2} X(z)$	$z^{-2} X(z) + x(-2) + z^{-1}x(-1)$

Contoh 7:

Tentukan respon sistem berikut untuk input x(n) adalah unit step:

0,25 y(n) = – y(n + 2) + y(n +1) + x(n + 2)

dengan y(0) = 1, y(1) = 2

Jawab:

Dengan mengambil **tranformasi-*z* satu sisi**, kita memperoleh:

$$0{,}25\,Y(z) = -[z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1)] + [zY(z) - zy(0)] + z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$$

$$= -z^2 Y(z) + z^2 + 2z + zY(z) - z + z^2 X(z) - z^2 - z$$

$$= -z^2 y(z) + zY(z) + z^2 X(z)$$

$$Y(z)\,[0{,}25 - z + z^2] = z^2 X(z) = z^3/(z-1)$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2}{z-1}\left[\frac{1}{z^2 - z + 0{,}25}\right]$$

$$= \frac{z^2}{(z-1)(z-0{,}5)^2} = \frac{a}{(z-1)} + \frac{b_2}{(z-0{,}5)^2} + \frac{b_1}{(z-0{,}5)}$$

Nilai koefisien a, b_2, dan b_1 dicari dengan teknik ekspansi pecahan parsial yang telah dibahas sebelumnya.

Koefisien a untuk *pole* riil tunggal ditentukan oleh persamaan:

$$a = \left[(z-p_1)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_1} = \left[(z-1)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = \frac{1}{(1-0{,}5)^2} = 4$$

kemudian dicari nilai b_2 dan b_1 :

$$b_2 = \left[(z-0{,}5)^2\,\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0,5} = \left[\frac{z^2}{(z-1)}\right]_{z=0,5} = \frac{0{,}25}{-0{,}5} = -0{,}5$$

$$b_1 = \left[\frac{d}{dz}\left\{(z-0{,}5)^2\,\frac{X(z)}{z}\right\}\right]_{z=0,5} = \left[\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^2}{z-1}\right\}\right]_{z=0,5}$$

$$= \left[\frac{(z-1)2z - z^2}{(z-1)^2}\right]_{z=0,5} = \frac{-0{,}5-0{,}25}{0{,}25} = -3$$

Ketika nilai-nilai a, b_2 dan b_1 dimasukkan kembali, menjadi:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2}{(z-1)(z-0{,}5)^2} = \frac{4}{(z-1)} + \frac{-0{,}5}{(z-0{,}5)^2} + \frac{3}{(z-0{,}5)}$$

$$Y(z) = 4\frac{z}{(z-1)} - 0{,}5\frac{z}{(z-0{,}5)^2} + 3\frac{z}{(z-0{,}5)}$$

$$= 4\frac{z}{(z-1)} - \frac{0{,}5z}{(z-0{,}5)^2} + 3\frac{z}{(z-0{,}5)}$$

dengan melihat tabel pasangan transformasi-z, didapatkan:

$y(n) = 4\,u(n) - n\,(0{,}5)^n\,u(n) + 3(0{,}5)^n\,u(n)$

5. Soal-soal

1. Cari transformasi-z dari $y(n) = n.a^{n-1}$, untuk $n \geq 0$.
2. Hitung transformasi-z balik (invers transformasi-z) dari :

$$X(z) = \frac{2z^3 + z}{(z-2)^2(z-1)}$$

   Gunakan metode ekspansi pecahan parsial
3. Cari penyelesaian persamaan beda (*difference equation*) dari:

   $y(n + 2) - 1{,}3y(n + 1) + 0{,}4\,y(n) = x(n)$

   dimana $y(0) = y(1) = 0$, dan $x(n) = u(n)$.